УДК: 534.21:537.226.86 https://doi.org/10.15407/jai2025.01.098

В. В. Левченко[1], С. В. Сімченко[2]
[1]Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна
вул. Героїв оборони, 15, м. Київ, 03041
[2]Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Україна
вул. Солом'янська, 7, м. Київ, 03110
[1]ylvv53@ukr.net
[2]sstehnology85@gmail.com
[1]https://orcid.org/0009-0003-1225-5844
[2]https://orcid.org/0000-0005-5280-7564

КОЛИВАННЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ З АЗИМУТАЛЬНИМИ РОЗРІЗАМИ ЕЛЕКТРОДІВ

Анотація. В п'єзоелектричних вібраторах круглої конфігурації (диски та кільця) власні форми осесиметричних коливань, починаючи з другої власної частоти (на обертонах) мають вузлові точки у вигляді концентричних кіл [3-10]. Внаслідок виникнення зон розтягування і стиснення знижується ефективність електромеханічного зв'язку. З метою уникнення такого недоліку заборонено [6] розрізати електродне покриття по концентричних колах. Опубліковані теоретичні дослідження в цьому напрямі не дають достатньої інформації аналізу цього явища, що і спричинило викладені в даній статі дослідження.

Проведено дослідження впливу азимутальних розрізів електродного покриття на частоти і форми коливань п'єзоелектричних кільцевих пластин, які поляризовані по товщині.

Ключові слова: кільцева п'єзокерамічна пластина, азимутальні розрізи електродів, аналіз частот і форм пружноелектричних коливань.

V. Levchenko[1] , S. Simchenko[2]
[1]National University of Life Resources and Environmental Sciences of Ukraine, Ukraine
15, Heroiv Oborony St., Kyiv, 03041
[2]State University of Information and Communication Technologies, Ukraine
7, Solomyanska St., Kyiv, 03110
[1]ylvv53@ukr.net
[2]sstehnology85@gmail.com
[1]https://orcid.org/0000-0003-1225-5844
[2]https://orcid.org/0000-0005-5280-7564

VIBRATION OF A PIEZOELECTRIC RING PLATE WITH AZIMUTHAL CUTTINGS OF ELECTRODES

Abstract. In piezoelectric vibrators of circular configuration (disks and rings), the eigenmodes of axisymmetric oscillations, starting from the second eigenmode (at overtones), have nodal points in the form of concentric circles [3-10]. As a result of the emergence of tension and compression zones, the efficiency of the electromechanical coupling decreases. In order to avoid such a drawback, it was proposed [6] to cut the electrode coating along concentric circles. Published theoretical studies in this direction do not provide sufficient information for the analysis of this phenomenon, which is why the research presented in this article was conducted.

The influence of azimuthal sections of the electrode coating on the frequencies and shapes of oscillations of piezoelectric ring plates, which are polarized along the thickness, was studied.

Keywords: ring piezoelectric ceramic plate, azimuthal sections of electrodes, analysis of frequencies and shapes of elastoelectric oscillations.

Постановка і загальний розв'язок задачі

Планарні гармонічні коливання п'єзоелектричної круглої пластини з електродованими лицевими площинами $z = \pm h/2$ при плоскому напруженому стані

$$\left(u_z = u_\theta = 0,\ \sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta},\ E_x = E_y = 0 \right)$$

у випадку осесиметричної з деформації описуються рівнянням [1,2]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \qquad (1)$$

і формулами для механічних напружень та електричної індукції

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\left(1-\nu_E^2\right)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right),$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\left(1-\nu_E^2\right)s_{11}^E}\left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1+\nu_E)d_{31}E_z^a\right), \qquad (2)$$
$$D_z = d_{31}(\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33}\sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z$$

В співвідношеннях (1), (2) S_{11}^E, S_{12}^E - пружні сталі при нульовому електричному полі, d_{31} – п'єзоелектрична стала, $k_E^2 = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\omega^2$, $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$ - аналог коефіцієнта Пуассона, ρ - густина матеріалу.

Розглянемо кільцеву пластину $r_0 < r < r_2$ з двобічним розрізом електродного покриття по кільцевій лінії $r = r_1$. Розв'язок рівняння (1) при гармонічних коливаннях $f(r,t) = \mathrm{Re}\, f^a(r)\exp iwt$ буде таким [4,7]

$$u_r^a(r) = RA_1J_1(k_Er) + RB_2Y_1(k_Er), \qquad r_0 < r < r_1$$
$$u_r^a(r) = RA_2J_1(k_Er) + RB_2Y_1(k_Er), \qquad r_1 < r < r_2 \qquad (3)$$

Розв'язку (3) відповідають механічні напруження σ_{rr}^a, $\sigma_{\theta\theta}^a$

$$\sigma_{rr}^a = \frac{R}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(A_na_1(k_Er) + B_nb_1(k_Er) - (1+\nu_E)d_{13}E_{za,n}\right)e^{i\omega t},$$
$$\sigma_{\theta\theta}^a = \frac{R}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(A_na_2(k_Er) + B_nb_2(k_Er) - (1+\nu_E)d_{13}E_{za,n}\right)e^{i\omega t}, \qquad (4)$$
$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n = 1,2$$

В формулах (4) введено позначення

$$a_1(k_Er) = k_ERJ_0(k_Er) - (1-\nu_E)\frac{R}{r}J_1(k_Er);$$
$$b_1(k_Er) = k_ERY_0(k_Er) - (1-\nu_E)\frac{R}{r}Y_1(k_Er);$$
$$a_2(k_Er) = \nu_Ek_ERJ_0(k_Er) + (1-\nu_E)\frac{R}{r}J_1(k_Er);$$
$$b_2(k_Er) = \nu_Ek_ERY_0(k_Er) + (1-\nu_E)\frac{R}{r}Y_1(k_Er).$$

Тут використовуються позначення $s_E = s_{11}^E\left(1-\nu_E^2\right)$, $E_{za,n}$ – амплітуди напруженості електричного поля $E_{z,n} = Re\,E_{za,n}\,exp\,i\omega t$ на кільці $r_{n-1} < r < r_n$. Приймається, що для всіх кілець $r_{n-1} < r < r_n$ залишаються справедливими припущення про плоский напружений стан і у всіх них електричний потенціал поля незалежний від планарних координат і змінюється по товщині по лінійному закону.

З умов спряження по лінії розрізу електродів r_1 при досконалому механічному і електричному контактах

$$u_r(r_1-0,t) = u_r(r_1+0,t), \quad \sigma_r(r_1-0,t) = \sigma_r(r_{1n}+0,t) \qquad (5)$$

одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$A_1 J_1(k_E r_1) + B_1 Y_1(k_E r_1) = A_2 J_1(k_E r_1) + B_2 Y_1(k_E r_1)\; A_1 a_1(k_E r_1) + B_1 b_1(k_E r_1) - (1+\nu_E) d_{13} E_{za,1} = \qquad (6)$$
$$= A_2 a_1(k_E r_1) + B_2 b_1(k_E r_1) - (1+\nu_E) d_{13} E_{za,2}\,,$$

Маємо чотири можливі комбінації граничних умов при $r = r_0$ і $r = r_2$ та відповідні системи для визначення невідомих сталих A_1, B_1, A_2, B_2:

жорстко закріплений край $r = r_0$ – жорстко закріплений край $r = r_2$

$$A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) = 0\,,$$
$$A_2 J_1(k_E r_2) + B_{21} Y_1(k_E r_2) = 0\,; \qquad (7)$$

жорстко закріплений край $r = r_0$ – вільний від напружень край $r = r_2$

$$A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) = 0\,,$$
$$A_2 a_1(k_E r_2) + B_2 b_1(k_E r_2) = (1+\nu_E) d_{13} E_{za,2}\,; \qquad (8)$$

вільний від напружень край $r = r_0$ – жорстко закріплений край $r = r_2$

$$A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) = (1+\nu_E) d_{13} E_{za,1}\,,$$
$$A_2 J_1(k_E r_2) + B_2 Y_1(k_E r_2) = 0\,; \qquad (9)$$

вільний від напружень край $r = r_0$ – вільний від напружень край $r = r_2$

$$A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) = (1+\nu_E) d_{13} E_{za,1}\,,$$
$$A_2 a_1(k_E r_N) + B_2 b_1(k_E r_N) = (1+\nu_E) d_{13} E_{za,2}\,. \qquad (10)$$

Для амплітуди струму через кільце $r_{n-1} < r < r_n$ можна одержати формулу

$$I_a = i\omega \frac{2\pi R d_{13}}{s_{11}^E (1-\nu_E)} \left[A_n \left(r_n J_1(k_E r_n) - r_{n-1} J_1(k_E r_{n-1}) \right) + \right.$$
$$\left. + B_n \left(r_n Y_1(k_E r_n) - r_{n-1} Y_1(k_E r_{n-1}) \right) \right] + i\omega\pi \left(r_n^2 - r_{n-1}^2 \right) k_p^2 \varepsilon_{33}^T E_{za,n}\,, \qquad (11)$$

користуючись якою і враховуючи умови електродного з'єднання, можна знайти повну провідність, а значить і співвідношення для визначення антирезонансних частот, тобто $I_a = 0$.

Задача про визначення особливостей форм коливання зводиться до розв'язку систем алгебраїчних рівнянь. У випадку протифазного з'єднання електродів маємо чотири можливі види систем:

для граничних умов $\sigma(r_0, t) = 0$ $u(r_2, t) = 0$

$$\begin{bmatrix} a_1(k_E r_0) & b_1(k_E r_0) & 0 & 0 \\ J_1(k_E r_1) & Y_1(k_E r_1) & -J_1(k_E r_1) & -Y_1(k_E r_1) \\ a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) & -a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) \\ 0 & 0 & J_1(k_E r_2) & Y_1(k_E r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\nu_E) d_{13} E_{za,1} \\ 0 \\ 2(1+\nu_E) d_{13} (E_{za,1} - E_{za,2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

для граничних умов $\sigma(r_0,t)=0 \quad \sigma(r_2,t)=0$

$$\begin{bmatrix} a_1(k_E r_0) & b_1(k_E r_0) & 0 & 0 \\ J_1(k_E r_1) & Y_1(k_E r_1) & -J_1(k_E r_1) & -Y_1(k_E r_1) \\ a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) & -a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) \\ 0 & 0 & a_1(k_E r_2) & b_1(k_E r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+\nu_E)d_{13}E_{za,1} \\ 0 \\ 2(1+\nu_E)d_{13}(E_{za,1}-E_{za,2}) \\ (1+\nu_E)d_{13}E_{za,1} \end{bmatrix}$$

для граничних умов $u(r_0,t)=0 \quad \sigma(r_2,t)=0$

$$\begin{bmatrix} J_1(k_E r_0) & Y_1(k_E r_0) & 0 & 0 \\ J_1(k_E r_1) & Y_1(k_E r_1) & -J_1(k_E r_1) & -Y_1(k_E r_1) \\ a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) & -a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) \\ 0 & 0 & a_1(k_E r_2) & b_1(k_E r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(1+\nu_E)d_{13}(E_{za,1}-E_{za,2}) \\ (1+\nu_E)d_{13}E_{za,2} \end{bmatrix}$$

для граничних умов $u(r_0,t)=0 \quad u(r_2,t)=0$

$$\begin{bmatrix} J_1(k_E r_0) & Y_1(k_E r_0) & 0 & 0 \\ J_1(k_E r_1) & Y_1(k_E r_1) & -J_1(k_E r_1) & -Y_1(k_E r_1) \\ a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) & -a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) \\ 0 & 0 & J_1(k_E r_2) & Y_1(k_E r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(1+\nu_E)d_{13}(E_{za,1}-E_{za,2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Чисельні результати та їх аналіз

Розглянемо п’єзокерамічну кільцеву пластину з властивостями $\rho = 7740\, кг/м^3$, $s_{11}^E = 15{,}2\cdot 10^{-12}\, м^2/Н$, $s_{12}^E = -5{,}8\cdot 10^{-12}\, м^2/Н$, $d_{31} = -125\cdot 10^{-12}\, Кл/Н$ $E_{za,1} = E_{za,2} = 2000$ в/м, що відповідає п’єзокераміці ЦТС-19 [1,7], при умові закріплення по внутрішньому радіусу r_0 $(\sigma(r_0,t)=0)$ і вільній зовнішній границі r_2 $(u(r_2,t)=0)$. Відношення радіусів $r_0/r_2 = 0{,}4$ і аналіз проводився для одного діаметрального розрізу радіуса r_{01}. Розрахунки проводились для безрозмірних власних частот $k_E R = \overline{\omega}$. Можливі наступні чотири варіанти з’єднань електродів, при яких напруженість електричного поля E в частинах кільця пластини буде:

№ 1. $E = E_{za,1}$ $(r_0 < r < r_1)$ $E = E_{za2}$ $(r_1 < r < r_2)$	№ 2. $E = E_{za,1}$ $(r_0 < r < r_1)$ $E = -E_{za,2}$ $(r_1 < r < r_2)$
№ 3. $E = E_{za,1}$ $(r_0 < r < r_1)$ $E = 0$ $(r_1 < r < r_2)$	№ 4. $E = 0$ $(r_0 < r < r_2)$ $E = E_{za,2}$ $(r_1 < r < r_2)$

Виконані розрахунки показали, що розрізи електродного покриття і їх кількість не впливають на значення власних частот коливань. Положення вузлових точок коливань ($u(r)=0$) не залежить від значення радіуса розрізу.

При першому варіанті з’єднання електродів форма коливань не залежить від r_1 і співпадає з формою коливань для пластини із суцільними електродами. Тому цей випадок не відображений на рисунках. При більшій кількості розрізів і подібному

підключенні електродів форми коливань також не змінюються. При r_1 близькому до r_0 форми коливань для випадків №2 і №3 співпадають, для №4 значення $u(r,t)$ прямує до нуля. При $r_1 \to r_2$ форми коливань для випадків №№ 1,2,4- співпадають, а для випадку №3 прямує до нуля. Найбільш значний вплив розрізів спостерігається при r_1 близькому до вузлової точки. Для другої моди $\bar{\omega}$ =8.04387 вузлова точка буде при $r/r_2 = 0.605796$. На рис. 1 і 2 наведені форми коливань для цієї частоти в околі вузлової точки. На рисунках суцільним лініям відповідає варіант №2 з'єднання електродів, лініям із тире - №4, а крапками нанесені лінії для третього варіанту.

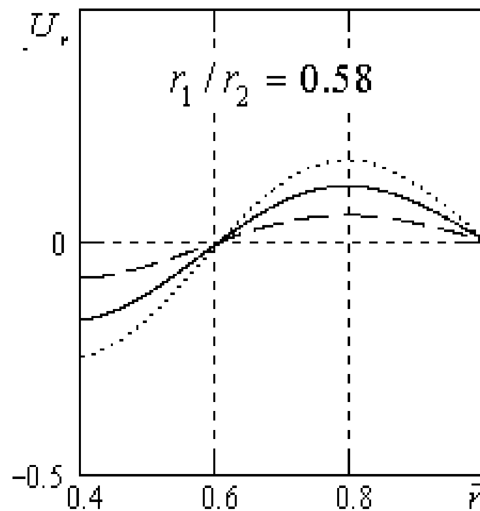


Рис. 1. Форми коливань в околі вузлової точки

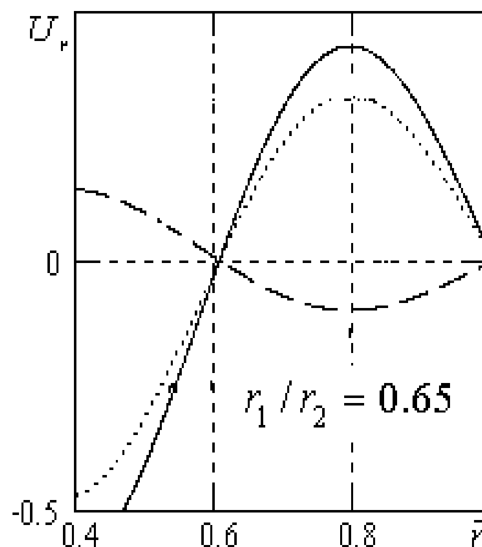


Рис. 2. Форми коливань в околі вузлової точки

Для третьої моди $\bar{\omega}$=13.20123 вузлових точок буде дві при $r/r_2 = 0.52211$ і $r/r_2 = 0.76136$

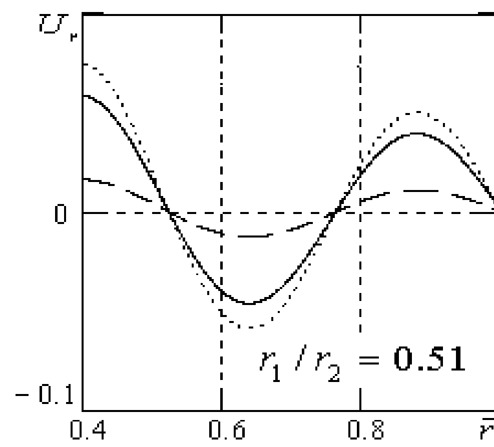


Рис. 3. Форми коливань третьої моди

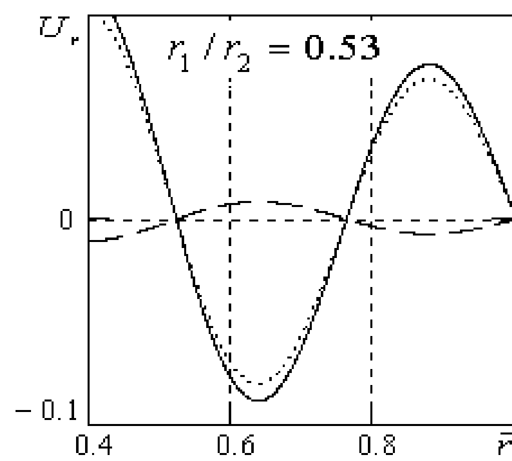


Рис. 4. Форми коливань третьої моди

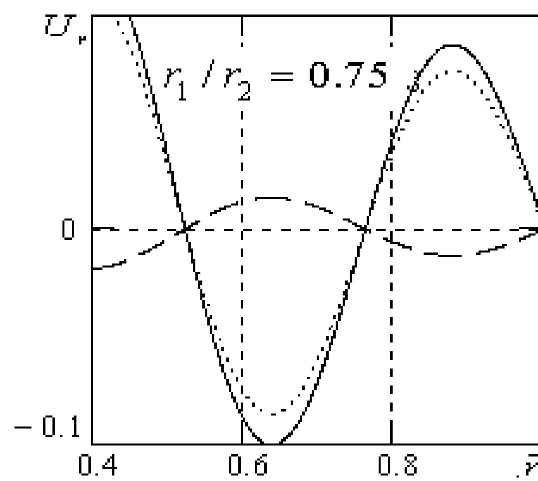


Рис. 5. Форми коливань третьої моди

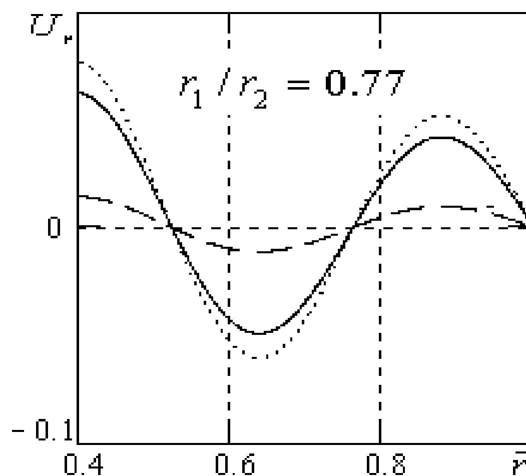


Рис. 6. Форми коливань третьої моди

Виконані розрахунки частково представлені на рис. 1–6 дозволяють стверджувати, що для мод і випадків, які розглядаються, справедливі наступні висновки: вибором з'єднання електродів і радіуса розрізу можна ефективно керувати амплітудою коливань; якщо r_1 співпадає з радіусом вузлових точок форми коливань для 1-3 варіантів з'єднань електродів співпадають із формами коливань для пластини із суцільним покриттям; при зміні радіуса розрізу в околі вузлових точок форми коливань стають різними, а варіанту з'єднань №4 можуть різко змінювати амплітуду; при r_1 між вузловими радіусами форми коливань не мають різких змін.

Висновки

Таким чином, в роботі показано, що азимутальний двобічний розріз електродів не призводить до зміни власних частот коливань кільцевої п'єзокерамічної пластини. Вузлові точки коливань співпадають при всіх можливих варіантах з'єднань електродів і в околах вузлових точок форми коливань, як правило, змінюють свою амплітуду. Зміною радіуса розрізу можна змінювати амплітуду форми коливань, за винятком випадку паралельної поляризації всіх кілець.

Література

1. Гринченко В.Т. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т. 5. Электроупругость Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. / Дьелесан Э., Руайе Д – М.: Наука. 1982. – 424с.
3. Левченко В.В., Павленко В.І. Спектр обємних хвиль зсуву у руеулярно шаруватому просторі.// Інформаційні та компютерні мережі. Київ. Університет Україна. 1(03). 2022. С. 92-102.
4. Левченко В.В. Плоскополяризованные объемные волны в регулярно-слоистой среде с проскальзыванием на границах раздела. // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: технічні науки, Том 28 (67) № 2 2017 С. 27-30.
5. Левченко В.В., Сімченко С.В. Дисперсійні властивості об'ємних звиль зсуву в шарувато періодичному середовищ типу метал-п'єщоелектрик –діелектрик.// Зв'язок №4, 2024. – С. 47-51.
6. Levchenko V.V.. Propagation magnetoelastic shear waves через regularly laminated medium with metalized interfaces// Int. Appl. Mech. - 2004 - 40, № 1 - P.97 - 10
7. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики,/ Тихонов А.Н., Самарский А,А – М,: Наука, 1972, – 736 с.
8. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. / Шульга М.О., Карлаш В.Л. – К.: Наукова думка, 2007. – 186 с.
9. Mason W.P. Piezoelectricity, its history and applications // J, Acoust, Soc, Am, – 1981, – 70, N 6, – P, 1561 – 1566.
10. Shul'ga N.A Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates / Shul'ga N.A., Bezverkhii O.I., Mekievskii O.I. // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N9. – P. 1031 – 1037.
11. Levchenko V.V.. Propagation magnetoelastic shear waves через regularly laminated medium with metalized interfaces// Int. Appl. Mech. - 2004 - 40, № 1 - P.97 – 10.

References

1. Grinchenko V.T. Mechanics of coupled fields in structural elements in 5 volumes / Under the general editorship of A.N. Guzya. T. 5. Electroelasticity Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. – K.: Nauk. Dumka, 1989. – 280 p.

2. Dyelesan E. Elastic waves in solids. Application for signal processing. / Dyelesan E., Royer D. – M.: Nauka. 1982. – 424 p.

3. Levchenko V.V., Pavlenko V.I. Spectrum of bulk shear waves in linearly layered space.// Information and computer networks. Kyiv. University of Ukraine. 1(03). 2022. P. 92-102.

4. Levchenko V.V. Plane-polarized bulk waves in a regularly laminated medium with slipping at the interface. // Scientific notes of the V.I. Vernadsky Tavrichesky National University. Series: Technical Sciences, Volume 28 (67) No. 2 2017 P. 27-30.

5. Levchenko V.V., Simchenko S.V. Dispersion properties of bulk shear waves in a layered periodic medium of the metal-piezoelectric-dielectric type // Communication No. 4, 2024. – P. 47-51.

6. Levchenko V.V. Propagation magnetoelastic shear waves through a regularly laminated medium with metalized interfaces// Int. Appl. Mech. - 2004 - 40, No. 1 - P.97 - 10

7. Tikhonov A.N. Equations of mathematical physics, / Tikhonov A.N., Samarskyi A.A – M,: Nauka, 1972, – 736 p.

8. Shulga M.O. Resonant electromechanical oscillations of piezoelectric plates. / Shulga M.O., Karlash V.L. - K.: Naukova dumka, 2007. - 186 p.

9. Mason W.P. Piezoelectricity, its history and applications // J, Acoust, Soc, Am, – 1981, – 70, N 6, – P, 1561 – 1566.

10. Shul'ga N.A Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates / Shul'ga N.A., Bezverkhii O.I., Mekievskii O.I. // Int. Appl. Mech. - 2010. - 46, N9. - P. 1031 - 1037.

11. Levchenko V.V. Propagation of magnetoelastic shear waves through regularly laminated medium with metalized interfaces// Int. Appl. Mech. - 2004 - 40, No. 1 - P.97 – 10.

The article has been sent to the editors 19.03.25.
After processing 25.03.25.
Submitted for printing 30.03.25.